Grado en Física

Análisis Matemático I – Evaluación capítulo 1 - Soluciones

Ejercicio 1. Calcula los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los que se verifica la desigualdad:

$$\frac{x^3-5}{x^2-2x-3} \geqslant 1. \tag{1}$$

Solución. La desigualdad (1) puede escribirse en la forma:

$$0 \leqslant \frac{x^3-5}{x^2-2x-3} - 1 = \frac{x^3-x^2+2x-2}{x^2-2x-3} \tag{2}$$

Esta última desigualdad es equivalente a:

$$(x^3-x^2+2x-2)(x^2-2x-3) \geqslant 0. \tag{3}$$

Como el polinomio x^3-x^2+2x-2 tiene la raíz 1, obtenemos fácilmente:

$$(x^3-x^2+2x-2)(x^2-2x-3) = (x-1)(x^2+2)(x+1)(x-3)$$

Como claramente $x^2+2>0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, para estudiar la desigualdad (3) podemos prescindir de este factor. Hemos obtenido que la desigualdad (1) es equivalente a:

$$h(x) = (x+1)(x-1)(x-3) \geqslant 0.$$

Como la función racional en (1) no está definida en los ceros del denominador, $x=-1$ y $x=3$, excluiremos dichos puntos de nuestras consideraciones. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
x < -1 &\implies h(x) < 0 \text{ porque es producto de tres números negativos.}\\
-1 < x < 1 &\implies h(x) > 0 \text{ porque es producto de un número positivo y dos negativos.}\\
1 < x < 3 &\implies h(x) < 0 \text{ porque es producto de dos números positivos y uno negativo.}\\
3 < x &\implies h(x) > 0 \text{ porque es producto de tres números positivos.}
\end{aligned}$$

Como, además, $h(1)=0$, concluimos que la desigualdad (1) es cierta para valores de x en $]-1,1] \cup]3,+\infty[$. ☺

Comentario. Principal fallo: no simplificar la desigualdad (1) expresándola como en (2). Segundo fallo, multiplicar ambos lados de la desigualdad (1) por el denominador y afirmar que dicha desigualdad equivale a $x^3-5 \geqslant x^2-2x-3$. Esto será así solamente cuando $x^2-2x-3>0$, lo que no siempre es cierto. Tercer fallo: las raíces de $x^2+2=0$ son $\pm\sqrt{2}$.

Hemos hecho en clase varios ejercicios como este. En la primera relación de ejercicios para casa también había uno parecido. Os entregué apuntes con técnicas para resolver desigualdades con ejemplos resueltos de desigualdades entre funciones racionales. Este tipo de ejercicios de desigualdades es el que más hemos estudiado. Muy pocos habéis hecho bien este ejercicio. Tú, ¿estudias o trabajas? Pues eso. ☹

Ejercicio 2. Usando la definición de la función arcotangente, prueba que para todo $x>0$ se verifica que:

$$\operatorname{arc\,tg}(x) + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}. \tag{4}$$

Solución. El arcotangente de un número $x \in \mathbb{R}$ se representa por $\operatorname{arc\,tg}(x)$, y es es el único número que verifica:

a) $-\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{arc\,tg}(x) < \dfrac{\pi}{2}$.

b) $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg}(x)) = x$.

Para probar la igualdad (4) tendremos que probar que estas dos condiciones las verifica el número $z = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Como $x > 0$ se tiene que $0 < \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{1}{x}\right) < \dfrac{\pi}{2}$, de donde se sigue que $0 < z < \dfrac{\pi}{2}$. Lo que prueba el punto *a)*.

Pongamos $w = \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Como $z + w = \pi/2$, se verifica que $\cos(z) = \operatorname{sen}(w)$ y $\operatorname{sen}(z) = \cos(w)$, tenemos que:

$$\operatorname{tg}(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{\cos(z)} = \frac{\cos(w)}{\operatorname{sen}(w)} = \frac{1}{\operatorname{tg}(w)} = x.$$

Lo que prueba el punto *b)*. ☺

Comentario. El enunciado no lo podía decir más claro: *Usando la definición de la función arcotangente*. Pero, claro está, si no la conoces no puedes hacer este ejercicio. Si no sabes las definiciones de las funciones elementales y sus principales propiedades no podrás hacer ningún ejercicio. Las relaciones entre el seno y el coseno de *ángulos complementarios* son cosas elementales, completamente básicas. Basta con dibujar un triángulo rectángulo para darse cuenta de que son evidentes. Pero si no se te ocurre eso, basta con que uses las fórmulas de adición para el seno y el coseno. Fórmulas que debes aprender porque hay que usarlas con frecuencia. O bien, las deduces fácilmente usando la exponencial compleja:

$$\cos(a+b) + i\,\operatorname{sen}(a+b) = \mathrm{e}^{(a+b)i} = \mathrm{e}^{ai}\,\mathrm{e}^{bi} = (\cos(a) + i\,\operatorname{sen}(a))(\cos(b) + i\,\operatorname{sen}(b))$$

Y basta hacer el producto e igualar partes real e imaginaria. Muy difícil, supongo.

En este ejercicio hay disparates como $90 = \pi/2$. Pues eso es falso. No voy a admitir errores de este tipo. De aquí en adelante, afirmaciones del tipo $\operatorname{arc\,tg}(1) = 45$, $270 = 3\pi/4$ y otras por el estilo, quitarán puntos en la evaluación.

Lo repito: no uséis grados o, si queréis usarlos, hacedlo correctamente, sabiendo lo que hacéis y expresándolo de forma apropiada. ☹

Ejercicio 3.

1. Calcula $\left|\dfrac{(2+i\sqrt{5})(1+i\sqrt{3})^3}{\sqrt{5}+i\sqrt{3}}\right|$
2. Resuelve la ecuación de segundo grado $z^2 - 4iz - 4 + 2i = 0$

Solución. 1)

$$\left|\frac{(2+i\sqrt{5})(1+i\sqrt{3})^3}{\sqrt{5}+i\sqrt{3}}\right| = \frac{\left|2+i\sqrt{5}\right|\left|1+i\sqrt{3}\right|^3}{\left|\sqrt{5}+i\sqrt{3}\right|} = \frac{3\times 2^3}{\sqrt{8}} = 6\sqrt{2}.$$

2) Es una ecuación de segundo grado de la forma $az^2 + bz + c = 0$ con $a = 1$, $b = -4i$, $c = -4 + 2i$. Sus soluciones son:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4i \pm \sqrt{(-4i)^2 - 4(-4+2i)}}{2} = \frac{4i \pm \sqrt{-8i}}{2}$$

Tenemos que $|-8i| = 8$ y $\arg(-8i) = -\pi/2$. Por tanto:

$$\sqrt{-8i} = \sqrt{8}\,(\cos(-\pi/4) + i\,\operatorname{sen}(-\pi/4)) = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2 - 2i.$$

Las soluciones pedidas son:

$$\frac{4i + \sqrt{-8i}}{2} = 1 + i, \qquad \frac{4i - \sqrt{-8i}}{2} = -1 + 3i.$$

☺

Comentario. Es increíble lo que hacéis para calcular el modulo en el apartado a). Por supuesto, hemos hecho ejemplos en clase, y he repetido que para calcular módulos de productos o cocientes de números complejos no hay que realizar dichos productos o cocientes, sino usar que el módulo de un producto o de un cociente es el producto o el cociente de los módulos. Y, por supuesto, el módulo de una potencia entera es la potencia del módulo. Pues como si nada.

En el apartado b), las enormes dificultades están en calcular $(-4i)^2 - 4(-4 + 2i)$ y $\sqrt{-8i}$.

Repito: no uséis grados para calcular argumentos de números complejos o, si queréis usarlos, hacedlo correctamente, sabiendo lo que hacéis y expresándolo de forma apropiada.

Claro que, pensándolo bien, habéis llegado aquí, ya sois universitarios... ¿Entonces? Pues que siga la fiesta. Bueno, bonito, barato. ☹